

Marcos Manoel Valverde Pereira

**DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE PARA  
CÁLCULO DOS PARÂMETROS DE  
GREENWOOD-WILLIAMSON**

Trabalho de Formatura apresentado a Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo  
para a conclusão do Curso de Graduação em  
Engenharia.

São Paulo  
2000

10,0  
Dez. zero  
Dimitris  
21/12/00

Marcos Manoel Valverde Pereira

**DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE PARA  
CÁLCULO DOS PARÂMETROS DE  
GREENWOOD-WILLIAMSON**

Orientador: Prof. Dr. Amilton Sinatora  
Trabalho de formatura PMC 580/581  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

São Paulo  
2000

**DEDALUS - Acervo - EPMN**



31600005974

*Aos meus colegas,  
professores e acima de  
tudo meu pai e minha  
mãe, sem os quais nada  
disto seria possível.*

## **Resumo**

O objetivo principal deste trabalho é a obtenção de um programa computacional que possa calcular de forma rápida e precisa os parâmetros de microcontato do modelo de Greenwood-Williamson, baseado no tratamento matemático apresentado por McCool.

A principal vantagem do modelo de Greenwood-Williamson sobre outros modelos, é a possibilidade de um estudo quantitativo dos esforços gerados no contato, na escala de grandeza das rugosidades das superfícies. Os parâmetros calculados por este modelo são: área, pressão, carregamento e incremento de temperatura no microcontato. Para este estudo quantitativo é utilizada a teoria de Hertz, que trata do contato esfera contra plano, complementada por uma análise estatística da distribuição dos picos de rugosidade.

O programa computacional desenvolvido durante este trabalho foi proposto para reduzir o tempo de processamento e a complexidade para o cálculo dos parâmetros deste modelo.

O objetivo do trabalho foi alcançado, resultando em um programa computacional, gerado no software matemático Octave, que calcula os parâmetros do microcontato de forma mais simples, rápida e com alto grau de precisão, conforme indicam as simulações realizadas.

## **Lista de símbolos e abreviações**

**GW** – Greenwood-Williamson.

**R<sub>q</sub>** – Índice de rugosidade (rugosidade média quadrática).

**Δ<sub>q</sub>** – Índice de rugosidade (inclinação média quadrática).

**R** – Raio de ponta do pico de rugosidade.

**σ<sub>s</sub>** – Desvio padrão das alturas dos picos de rugosidade.

**w** – deformação do pico de rugosidade.

**z** – altura do pico de rugosidade sem deformação.

**d** – altura do pico de rugosidade deformado.

**A** – Área real de contato de um pico de rugosidade em contato com superfície plana.

**P** – Carregamento de um pico de rugosidade em contato com superfície plana.

**p<sub>0</sub>** – Pressão de contato de um pico de rugosidade em contato com superfície plana.

**E** – Módulo de elasticidade do material.

**ν<sub>n</sub>** - Coeficiente de Poisson do material.

**u<sub>1</sub>** e **u<sub>2</sub>** – variáveis aleatórias (entre 0 e 1).

**m<sub>n</sub>** – momento espectral ‘n’ do perfil de rugosidade.

**α** - momento espectral zero vezes momento espectral quatro dividido pelo quadrado do momento dois.

**f** – coeficiente de atrito entre as superfícies.

**H** – espessura do filme de lubrificante.

**x<sub>1</sub>** – deformação do pico de contato.

**x<sub>1/2</sub>** – raiz quadrada da deformação do pico de contato.

**x<sub>3/2</sub>** – deformação do pico de contato elevado a três meios.

## SUMÁRIO

1. Introdução.....	1
2. Caracterização das superfícies de contato .....	2
2.1 Caracterização geométrica.....	2
2.2 Caracterização Estatística.....	4
3. Simulações .....	8
3.1 Simulação 1 .....	8
3.2 Simulação 2 .....	10
3.3 Simulação 3 .....	12
3.4 Simulação 4 .....	17
4. Conclusões e Resumo.....	19
5. Referências bibliográficas.....	21
6. Anexos.....	22
6.1 Função para simulação 1 .....	23
6.2 Função para simulação 2 .....	24
6.3 Função para simulações 3 e 4 .....	25
6.4 Funções Auxiliares.....	26

## 1. Introdução

O principal objetivo dos modelos de microcontato é relacionar a rugosidade das superfícies com os fenômenos físicos relacionados com o contato. McCool[1] apresenta de uma forma mais clara o modelo de Greenwood-Williamson[2], que é um dos primeiros e mais conhecido modelo de microcontato.

Mesmo sendo o mais conhecido modelo de microcontato, o modelo de GW é complexo, à medida que leva em sua formulação aspectos estatísticos avançados. Este modelo foi publicado na década de 60, o que indica que a grande parte dos cálculos foi realizada de forma analítica. A partir desta conclusão, a implementação computacional deste modelo, nos dias de hoje é possível graças à evolução das ferramentas de cálculo numérico.

A implementação computacional se baseará no artigo de McCool[1], que apresenta soluções mais simples para utilização do modelo de GW. Pretende-se utilizar os perfis das superfícies coletados por um rugosímetro, calcular o  $R_q$  ou rugosidade média quadrática, e o  $\Delta q$  ou inclinação média quadrática, obtendo assim os momentos espectrais que caracterizam desta maneira o raio de ponta ( $R$ ), e o desvio padrão da altura ( $\sigma_s$ ) dos picos de rugosidade. A partir destes valores,  $R$  e  $\sigma_s$ , será realizado um estudo da distribuição estatística da altura destes picos, para calcular parâmetros como área e comprimento característicos de contato, carregamento, pressão e incremento de temperatura.

Para validação do modelo implementado, serão comparados os resultados da simulação com o exemplo apresentado por McCool[2]. Além disto também estão previstas simulações para verificação da consistência da resposta e para verificação do comportamento de variáveis do sistema.



## 2. Caracterização das superfícies de contato

### 2.1 Caracterização geométrica

Para o entendimento do modelo, se torna necessário o conhecimento do perfil de rugosidade e da geometria proposta para o pico de rugosidade, assim como a definição das suas dimensões características. Abaixo ambos estão representados.

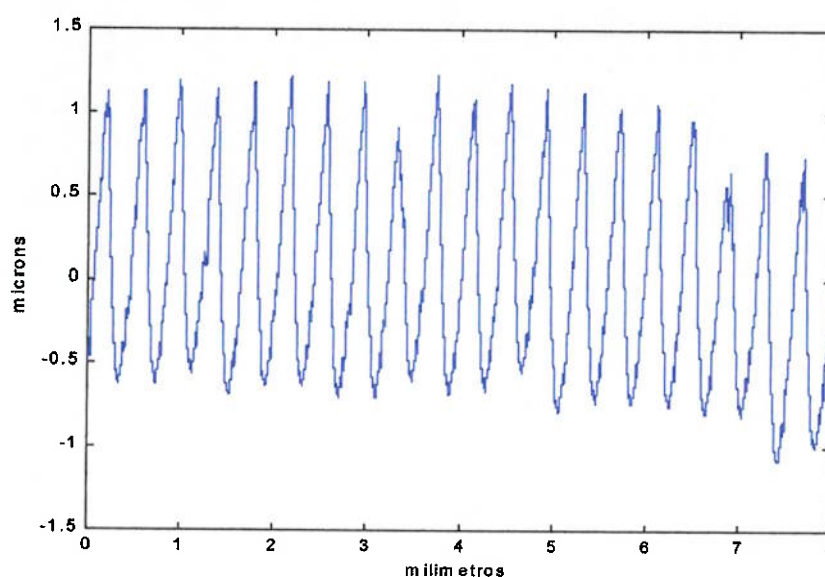


Figura 1: Exemplo de perfil de rugosidade

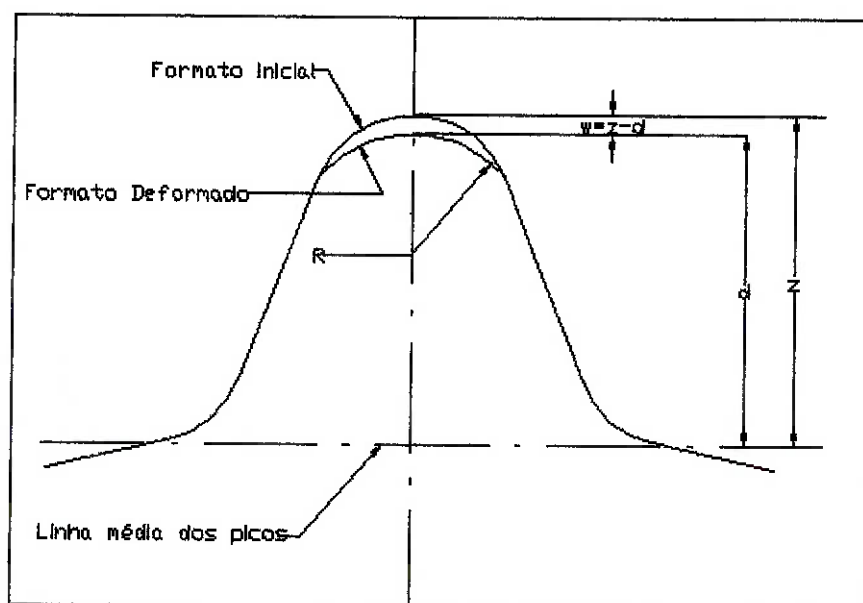


Figura 2: Modelo de pico de rugosidade

A figura 1 mostra um exemplo de perfil extraído por um rugosímetro. Notar que os eixos verticais e horizontais não têm a mesma escala.

Os picos de rugosidades da superfície têm alturas diferentes, e por isto o contato se realizará primeiro nos picos mais altos, depois nos picos mais baixos. É importante ressaltar que no contato, as duas superfícies possuem picos de rugosidade, o que complica o estudo do contato. Para facilitar o estudo será calculada uma rugosidade resultante e o estudo será feito como se uma superfície rugosa equivalente fosse pressionada contra uma superfície idealmente plana e indeformável.

Adicionalmente supõe-se que seja aplicável o modelo de contato de Hertz ao contato dos picos.

O modelo apresentado leva em conta os seguintes aspectos, que podem ser vistos na figura 2:

- Modelo baseado no contato esfera contra plano, segundo a teoria de Hertz;
- O modelo estuda o contato entre superfície rugosa equivalente com uma superfície perfeitamente plana;

A figura 2 apresenta um pico de rugosidade em contato com um plano, localizado a uma distância  $d$  da linha média dos picos. Ocorrerá um deslocamento  $(x-d)$  no pico, mas o raio da ponta do pico permanecerá constante.

Admitindo o contato segundo Hertz, temos então:

$$A = \pi R(x - d); x \geq d \quad (1) \text{ (Área de contato)}$$

$$P = \frac{4}{3} E' R^{\frac{1}{2}} (x - d)^{\frac{3}{2}}; x \geq d \quad (2) \text{ (Carregamento do contato)}$$

$$p_o = \frac{2E'}{\pi R^{\frac{1}{2}}} (x - d)^{\frac{1}{2}}; x \geq d \quad (3) \text{ (Pressão de contato)}$$

$$E' = \frac{1}{\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}} \quad (4) \text{ (Módulo de elasticidade equivalente)}$$

$E_n$  é o módulo de elasticidade do material.

$\nu_n$  é o coeficiente de Poisson do material.

## 2.2 Caracterização Estatística

A caracterização estatística que se segue foi desenvolvida por McCool[1], e admite as seguintes hipóteses:

Distribuição Gaussiana das alturas dos picos com média zero e desvio padrão  $\sigma_s$ .

Normalizando a distribuição das alturas dos picos, obtém-se:

$$z = \frac{x}{\sigma_s} \Rightarrow (x - d) = \sigma_s \left( z - \frac{d}{\sigma_s} \right) \quad (5) \text{ (Altura normalizada do pico)}$$

Então:

$$A \propto \left( z - \frac{d}{\sigma_s} \right) = x_1 \quad (6)$$

$$a \propto \left( z - \frac{d}{\sigma_s} \right)^{\frac{1}{2}} = x_{1/2} \quad (7)$$

$$p_o \propto \left( z - \frac{d}{\sigma_s} \right)^{\frac{1}{2}} = x_{1/2} \quad (8)$$

$$P \propto \left( z - \frac{d}{\sigma_s} \right)^{\frac{3}{2}} = x_{3/2} \quad (9)$$

Sabendo que:

$$F_n \left( \frac{d}{\sigma_s} \right) = \int_{\frac{d}{\sigma_s}}^{\infty} \left( z - \frac{d}{\sigma_s} \right)^n \phi(z) dz \quad (10)$$

$\phi(z)$  é a densidade de probabilidade da distribuição normal.

Utilizando as leis de probabilidade condicional, as médias esperadas para as variáveis  $x_1$ ,  $x_{1/2}$  e  $x_{3/2}$ , supondo que houve contato é:

$$\overline{x_n} = \frac{F_n}{F_0} \quad (11)$$

Para a geração da distribuição normal necessária para o cálculo das variáveis  $x_1$ ,  $x_{1/2}$  e  $x_{3/2}$  será utilizado o método de Monte-Carlo:

- Baseado no método desenvolvido por Marsaglia[3], para gerar uma cauda de distribuição normal;
- Selecionados valores de  $u_1$  que satisfazem a inequação (12), sendo que as amostras de  $z$  serão dadas pela equação (13). ( $u_1$  e  $u_2$  são variáveis randômicas entre 0 e 1);

Conhecido o desvio padrão e calculada a amostra de  $z$  é possível gerar a distribuição dos picos de rugosidade em contato.

$$u_2 < \frac{d}{\sigma_s} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{\sigma_s}\right)^2 - 2\ln(u_1)}} \quad (12)$$

Se a condição acima foi atendida, então:

$$z = \sqrt{\left(\frac{d}{\sigma_s}\right)^2 - 2\ln(u_1)} \quad (13)$$

Utilizada a equação de Archard[4] para o incremento de temperatura ( $\theta$ ) tem-se que ( $\theta$ ) é proporcional a  $x_1$ .

$$\theta = \frac{f v E' (x - d)}{3(k_1 + k_2)}; \frac{v a}{2X} < 0.1 \quad (14)$$

Onde:

$f$  é o coeficiente de atrito;

$v$  é a velocidade de deslizamento relativa;

$k_n$  é a condutividade térmica do corpo  $n$ ;

$X$  é a difusividade térmica;

$a$  é o raio do microcontato.

### 2.3 Cálculo dos momentos espectrais

Os momentos espectrais dos perfis de rugosidade, são os parâmetros principais para a determinação do raio dos picos e do desvio padrão das alturas destes picos. Estes momentos espectrais são três, e são calculados da seguinte maneira.

$$m_0 = \frac{\int_0^L (y(x))^2 dx}{L}; m_2 = \frac{\int_0^L \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx}{L}; m_4 = \frac{\int_0^L \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx}{L} \quad (15)$$

Sendo  $y(x)$  a descrição do perfil de rugosidade, com média zero.

Raio médio dos picos de rugosidade:

$$R = 0.375 \left( \frac{\pi}{m_4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

Desvio padrão da distribuição das alturas dos picos:

$$\sigma_s = \left( 1 - \frac{0.8968}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}; \text{onde: } \alpha = \frac{m_0 m_4}{m_2} \quad (17)$$

Como existem duas superfícies rugosas, devemos calcular um momento espectral equivalente, que simule o contato entre uma superfície rugosa equivalente e um plano liso.

$$m_{n_e} = m_{n_1} + m_{n_2} \quad (18)$$

Quando as superfícies forem anisotrópicas, temos então:

$$m_{0_e} = \frac{m_{0_1} + m_{0_2}}{2}; m_{2_e} = (m_{2_1} m_{2_2})^{\frac{1}{2}}; m_{4_e} = (m_{4_1} m_{4_2})^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

Conhecendo os perfis de rugosidade é possível o cálculo de  $m_0$ ,  $m_2$  e  $m_4$ .

Para o cálculo dos momentos espectrais da equação (15), serão utilizadas as fórmulas de derivação de Whitehouse[5]. Isto é necessário pois, a derivação do sinal digital pode gerar valores resultantes com grande erro e estas fórmulas limitam estes erros.

$$m_0 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n (y(i))^2 * h \quad (20)$$

$$m_2 = \frac{1}{L - 6h} \sum_{i=4}^{n-3} \frac{(y(i+3) - 9y(i+2) + 45y(i+1) - 45y(i-1) + 9y(i-2) - y(i-3))^2}{60} \quad (21)$$

$$m_4 = \frac{1}{L-6h} \sum_{i=4}^{n-3} \frac{(2y(i+3) - 27y(i+2) + 270y(i+1) - 490y(i) + 270y(i-1) - 27y(i-2) + 2y(i-3))^2}{180h} \quad (22)$$

Onde:

L é o comprimento a ser medido pelo rugosímetro;

h é o espaçamento entre os pontos;

i é a posição do ponto no arquivo digital do sinal.

É importante ressaltar que os momentos espectrais podem ser relacionados com outros parâmetros usuais de rugosidade, como o índice de rugosidade  $R_q$  e a inclinação média dos picos de rugosidade  $\Delta q$ , da seguinte forma.

$$m_0 = R_q^2; m_2 = \Delta q^2 \quad (23)$$

Para finalizar o estudo da rugosidade uma pequena correção é necessária na linha de referência pois normalmente é utilizada a linha média do perfil para o cálculo dos parâmetros usuais de rugosidade, no entanto o modelo de G-W utiliza a linha média das alturas dos picos de rugosidade. Então utilizaremos uma correção de referência segundo Bush e outros[6]:

$$\frac{d}{\sigma_s} = \frac{\frac{h}{\sigma_s} - \frac{4}{\sqrt{(\pi\alpha)}}}{\sqrt{1 - \frac{0.8968}{\alpha}}} \quad (24)$$

### 3. Simulações

#### 3.1 Simulação 1

Após o desenvolvimento das funções necessárias no programa Octave, uma primeira simulação foi realizada para a verificação dos resultados alcançados, para isto foi utilizado o exemplo numérico apresentado no final do artigo de McCool. Os resultados obtidos estão relacionados abaixo e comparados com os valores esperados. A função criada para cálculo comparativo com o artigo de McCool está apresentada em anexo (anexo 6.1).

##### Hipóteses:

Duas superfícies isotrópicas de aço, lubrificadas com filme de espessura  $h=0.3\mu\text{m}$ , com velocidade de deslizamento de  $1\text{m/s}$ .

Superfície 1 apresenta:  $R_q=0.1\mu\text{m}$  e  $\Delta q=0.03\text{rad}$

Superfície 2 apresenta:  $R_q=0.12\mu\text{m}$  e  $\Delta q=0.028\text{rad}$

Coefficiente de atrito:  $f=0.06$

Utilizando o modelo implementado, com a geração de dez mil amostras através do método de Monte-Carlo, os resultados obtidos estão dispostos na tabela 1:

**Tabela 1: Comparação entre resultados do modelo e do artigo de McCool**

	Resultados Obtidos		Resultados de McCool	
	Média	Máxima 90% picos	Média	Máxima 90%picos
Área Real(A)	$2.119\mu\text{m}^2$	$4.668\mu\text{m}^2$	$2.10\mu\text{m}^2$	$4.79\mu\text{m}^2$
Raio de Contato (a)	$0.742\mu\text{m}$	$1.219\mu\text{m}$	$0.7367\mu\text{m}$	$1.197\mu\text{m}$
Carga (P)	$10.644\text{mN}$	$27.497\text{mN}$	$10.4\text{ mN}$	$27\text{ mN}$
Pressão ( $p_0$ )	$5.377\text{ GPa}$	$8.836\text{ GPa}$	$5.294\text{GPa}$	$8.6\text{ GPa}$
Incremento de Temperatura( $\theta$ )	$1.402\text{ }^\circ\text{C}$	$3.146\text{ }^\circ\text{C}$	$1.4^\circ\text{C}$	$3.21^\circ\text{C}$

Vale lembrar que os resultados da tabela 1 são aplicáveis para um único pico de rugosidade. Para o cálculo “macroscópico” da superfície basta conhecer a distribuição de picos de rugosidade na superfície e a área aparente de contato.

Analisando na tabela 1, os resultados do modelo e comparando com os resultados do artigo pode se concluir que os valores são compatíveis.

O teste comparativo acima deixou de lado uma parte importante do programa aqui desenvolvido. Primeiramente por não testar as funções que manipulam o perfil de rugosidade, visto que o artigo não apresenta o perfil utilizado, apenas os valores de rugosidade ( $R_q$ , e  $\Delta q$ ). Em segundo lugar, não é mostrado de uma forma clara e direta o comportamento do modelo apresentado no artigo de McCool, quando há variação do filme de lubrificante, e conseqüente variação do afastamento entre as superfícies.

Cabe aqui uma breve explicação sobre o tratamento dado a obtenção e utilização do filme de óleo para fins de utilização no modelo aqui proposto. Como a idéia principal deste trabalho é o desenvolvimento de um software que calcule os parâmetros de GW, então optou-se pela pesquisa sobre a espessura de um filme de lubrificante em outras fontes. Isto quer dizer que em nenhum momento é apresentada neste trabalho (nem no artigo de McCool) uma forma de cálculo do filme de lubrificante.

Um dos problemas de apresentar uma forma de cálculo do filme de lubrificante durante este trabalho é a restrição da utilização deste modelo para uma dada aplicação, mas da maneira em que o modelo é apresentado, nada impede que quem estiver utilizando o software aqui desenvolvido possa usar uma solução qualquer para obtenção desta variável (modelos matemáticos ou medições através de ensaios) e utilização neste modelo.



### 3.2 Simulação 2

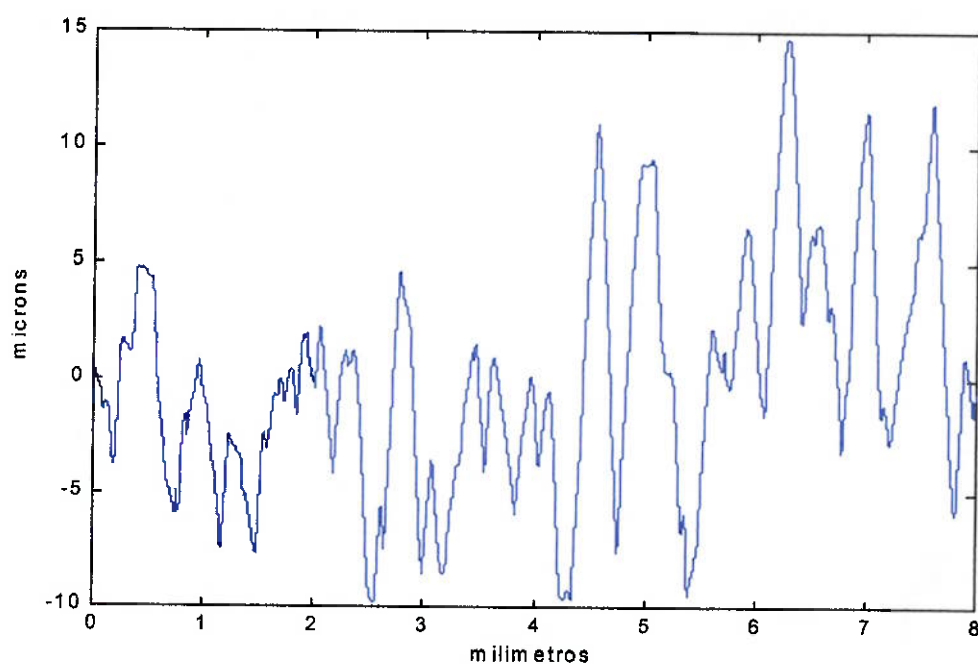
Após a correlação do programa com o artigo do McCool, foi realizado o teste das funções de manipulação do perfil de rugosidade. Para isto foi necessária a aquisição de perfis de rugosidade e dos índices de rugosidade por um rugosímetro.

Serão apresentados apenas os resultados de dois perfis de rugosidade para demonstração do nível de precisão das rotinas de manipulação do perfil de rugosidade. Esta manipulação é importante pois é a partir do perfil de rugosidade que são obtidos os momentos espectrais da superfície. Estes momentos são parâmetros fundamentais para o cálculo do raio de contato dos picos de rugosidade e do desvio padrão de altura dos picos de rugosidade em contato (equações 16 e 17).

O primeiro perfil está representado na figura 1, mostrada anteriormente. Este perfil foi obtido na medição da rugosidade de um disco utilizado no ensaio de desgaste de pino contra disco. O formato do perfil evidência as marcas usinagem. Este disco foi torneado e o perfil foi obtido no sentido radial do disco.

O segundo perfil obtido foi o perfil de uma lixa, mostrando uma variação de altura do perfil bastante aleatória se comparada com o perfil anterior. Como o intuito desta simulação foi apenas o teste das funções de medição de rugosidade, não importava o tipo de material da superfície a ser medida. Este perfil de rugosidade é apresentado na figura 3 abaixo.

Foi possível apenas comparar o índice de rugosidade  $R_q$  obtido pelo programa, visto que o índice  $\Delta q$  não é calculado pelo rugosímetro.

**Figura 3: Perfil de rugosidade de uma lixa****Tabela 2: Comparação entre índice de rugosidade  $R_q$  esperado e obtido pelo programa**

Perfil	Esperado	Obtido
Figura 1	$R_q = 5.7\mu\text{m}$	$R_q = 5.70\mu\text{m}$
Figura 3	$R_q = 50\mu\text{m}$	$R_q = 50.03\mu\text{m}$

Como é possível verificar na tabela 2, os valores de rugosidade esperados (calculados pelo rugosímetro) são obtidos pelas rotinas de tratamento do perfil de rugosidade desenvolvidos neste trabalho dentro de uma faixa de tolerância.

### 3.3 Simulação 3

Com o modelo devidamente comprovado, testado e correlacionado com casos conhecidos, estudou-se o comportamento das variáveis do sistema quando há uma variação da espessura do filme de óleo. Para realização de tal experiência o modelo foi simulado diversas vezes para as mesmas superfícies, variando-se apenas a espessura do filme de óleo. Foi utilizado o desvio padrão do perfil equivalente das superfícies como referência para a variação da espessura, obtendo-se o parâmetro adimensional  $H/\sigma_s$  (espessura do filme de óleo dividido pelo desvio padrão da superfície equivalente).

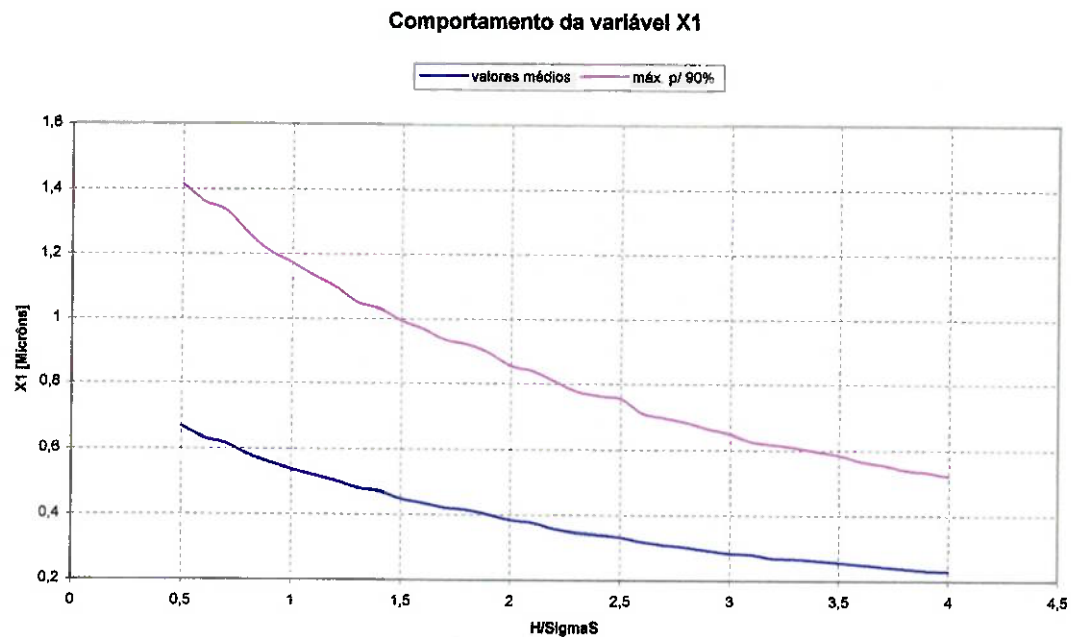
A faixa de  $H/\sigma_s$  estudada varia entre 0,5 e 4, com incremento de 0,1. Cada vez que o valor de  $H/\sigma_s$  era incrementado, o programa calculava todos os parâmetros de saída do sistema, cada procedimento de cálculo leva aproximadamente 4 minutos, o que pode ser considerado bastante rápido, se comparado ao cálculo manual do modelo de GW.

Nas figuras de 4 até 11 estão mostrados os valores das variáveis:  $x_1$ ,  $x_{1/2}$ ,  $x_{3/2}$ , área, pressão, carregamento, elevação de temperatura e raio dos picos de aspereza (summits), no micro contato entre as superfícies.

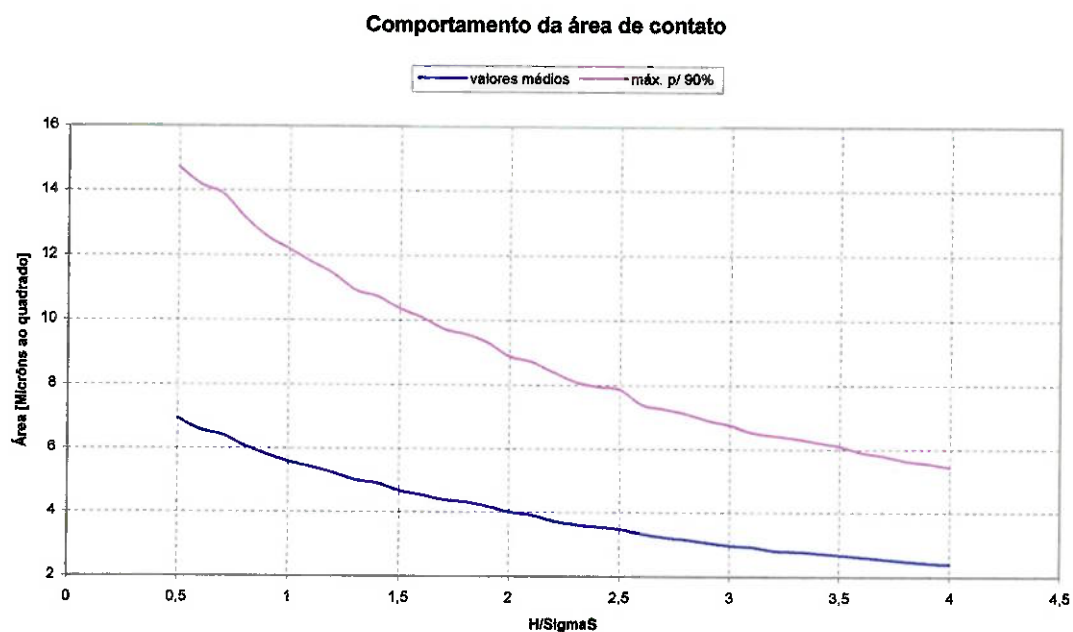
Nas figuras de 4 até 11 são observadas as semelhanças entre os comportamentos das variações da área de contato e elevação da temperatura, pois todas as outras variáveis do sistema permanecem as mesmas, somente há variação da variável  $x_1$ . Como ambos parâmetros, área e incremento de temperatura dependem linearmente desta variável, é razoável que haja semelhança no comportamento de ambas. O mesmo pode se aplicar em relação a raio e pressão de contato, proporcionais a variável  $x_{1/2}$ , e a carga de contato que é proporcional a variável  $x_{3/2}$ .

As figuras de 4 à 11 evidenciam uma das principais preocupações do modelo de GW, ou seja, que os valores médios não representam de forma completa o contato, pois existe uma variação das alturas dos picos de rugosidade, sendo que picos mais altos

estão sujeitos a valores de deformação superiores ao valor médio. Esta variação nas deformações pode resultar em diferenças de comportamento mecânico, podendo haver mudança de comportamento elástico para plástico em alguns picos de rugosidade.



**Figura 4:** Comportamento da variável  $x_1$  com a variação da espessura do filme de óleo



**Figura 5:** Comportamento da área de contato em função de  $H/\sigma_s$

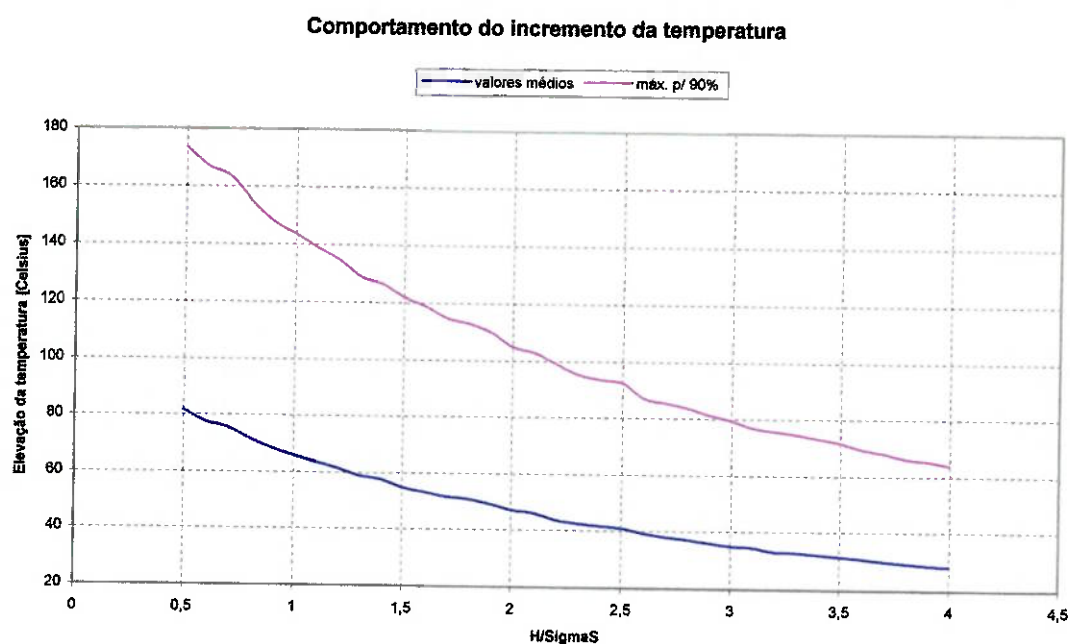


Figura 6: Comportamento do incremento da temperatura em função de  $H/\sigma_s$

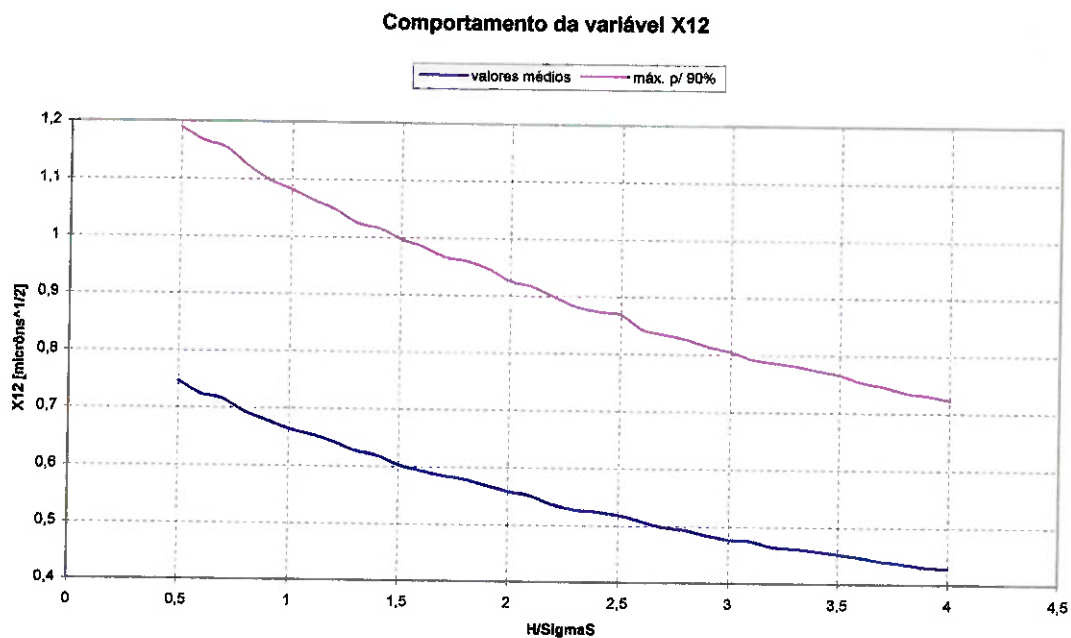
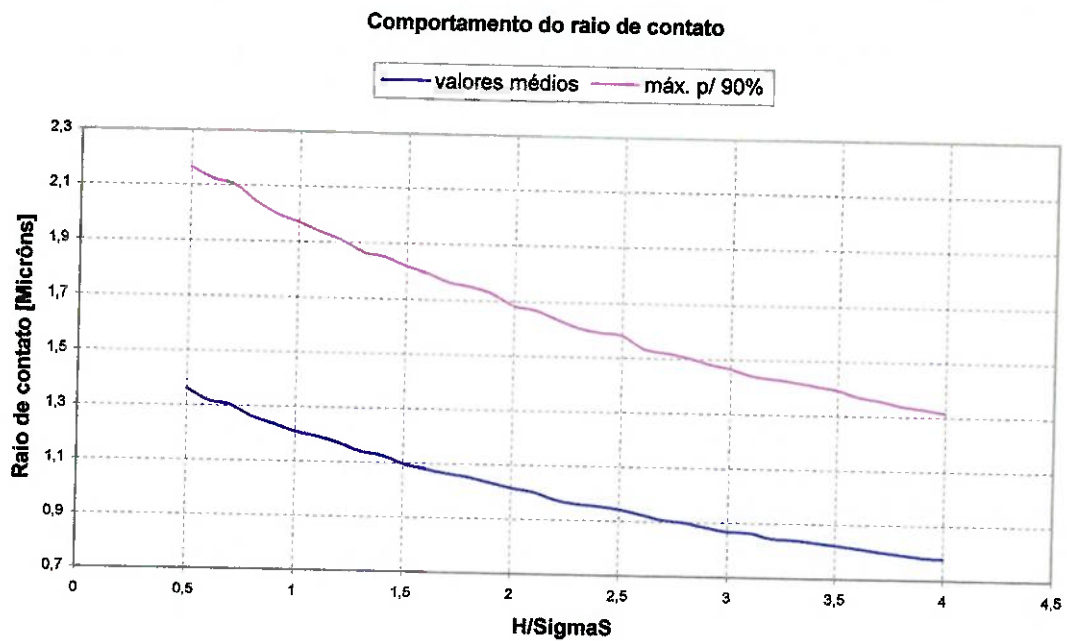
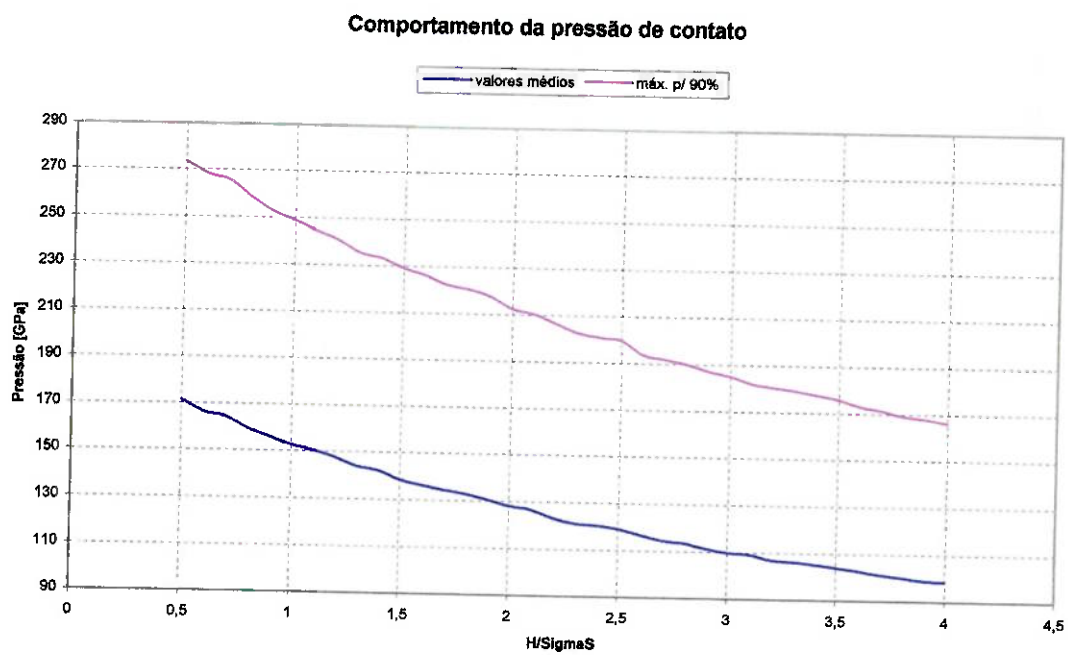


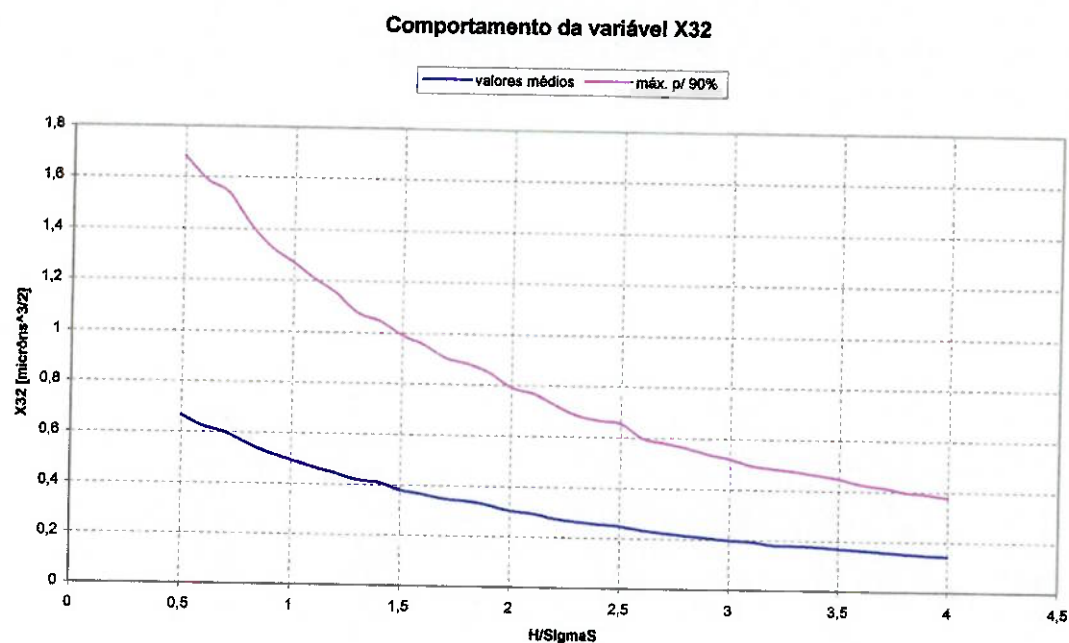
Figura 7: Comportamento da variável X12 em função de  $H/\sigma_s$



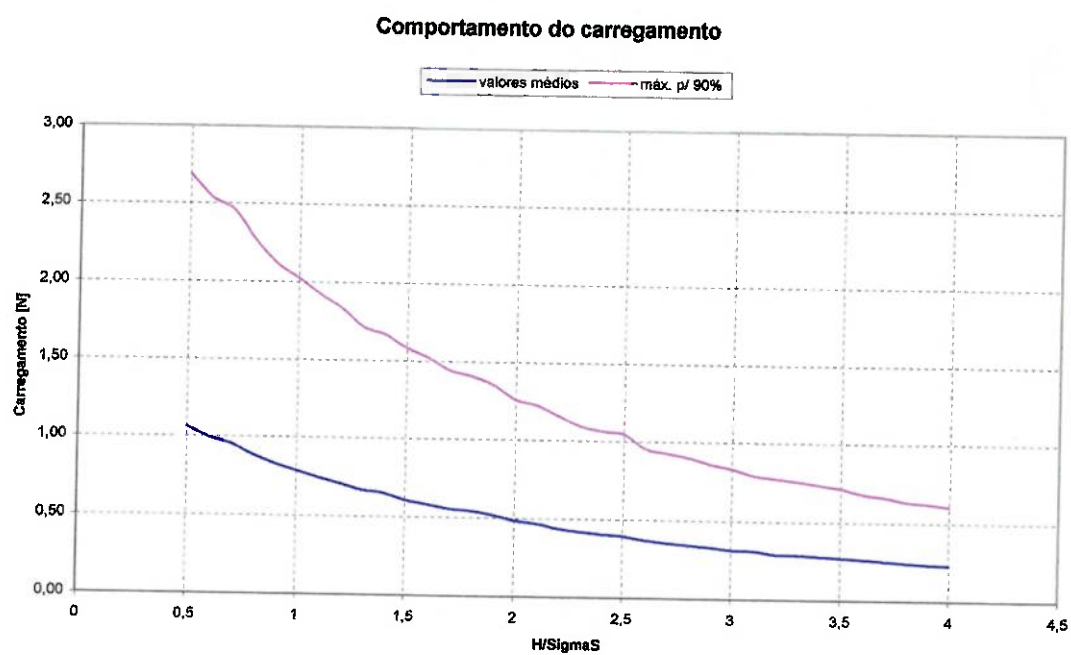
**Figura 8: Comportamento do raio de contato em função de  $H/\sigma_s$**



**Figura 9: Comportamento da pressão máxima de contato em função de  $H/\sigma_s$**



**Figura 10: Comportamento da variável X32 em função de  $H/\sigma_s$**



**Figura 11: Comportamento da carga de contato em função de  $H/\sigma_s$**

### 3.4 Simulação 4

Uma quarta e última simulação foi realizada para verificação da variação da resposta quando as entradas do programa permanecem inalteradas. Esta simulação é necessária porque durante o processamento dos dados, há geração aleatória (dentro de uma certa faixa) de valores para a distribuição normal das alturas. Então simulando o sistema várias vezes é possível determinar qual a variação das respostas do modelo.

Esta simulação foi realizada com o perfil da figura 1, e filme de óleo com valor igual ao desvio padrão do perfil e repetida sucessivamente. Os valores colocados na tabela 3 se referem a média e desvio padrão de 10 valores de cada variável.

**Tabela 3: Resultado de 10 simulações sucessivas, com entradas mantidas constantes**

Variável	Média	Desvio Padrão	Desvio padrão (%)
X <sub>1</sub> médio	0,540 $\mu\text{m}$	0,005 $\mu\text{m}$	0,89
X <sub>1/2</sub> médio	0,667 $\mu\text{m}^{1/2}$	0,004 $\mu\text{m}^{1/2}$	0,54
X <sub>3/2</sub> médio	0,497 $\mu\text{m}^{3/2}$	0,006 $\mu\text{m}^{3/2}$	1,2
X <sub>1</sub> 90%	1,18 $\mu\text{m}$	0,01 $\mu\text{m}$	0,98
X <sub>1/2</sub> 90%	1,085 $\mu\text{m}^{1/2}$	0,005 $\mu\text{m}^{1/2}$	0,49
X <sub>3/2</sub> 90%	1,28 $\mu\text{m}^{3/2}$	0,02 $\mu\text{m}^{3/2}$	1,48
Área média(A)	5,62 $\mu\text{m}^2$	0,05 $\mu\text{m}^2$	0,89
Carregamento médio (P)	792,2 mN	10 mN	1,2
Pressão média (p <sub>0</sub> )	153,2 GPa	0,8 GPa	0,54
Raio médio (a)	1,213 $\mu\text{m}$	0,007 $\mu\text{m}$	0,54
Teta médio ( $\theta$ )	66,2 °C	0,6 °C	0,89
Área 90% (A)	12,2 $\mu\text{m}^2$	0,1 $\mu\text{m}^2$	0,98
Carregamento 90% (P)	2036,2 mN	30 mN	1,5
Pressão 90% (p <sub>0</sub> )	249,3 GPa	1,2 GPa	0,49
Raio 90% (a)	1,97 $\mu\text{m}$	0,01 $\mu\text{m}$	0,49
Teta 90% ( $\theta$ )	144,2 °C	1,4 °C	0,98

Na tabela 3 é importante notar que os valores médios se referem a média dos picos em contato e as variáveis indicadas com 90% são os valores máximos para 90% dos picos em contato. Os valores se referem à solicitação de um pico de rugosidade.



A incerteza máxima de 1,5% observada na tabela 3 indica uma repetibilidade aceitável do programa.

#### 4. Conclusões e Resumo

O modelo calcula parâmetros de microcontato: área, pressão, carregamento, elevação de temperatura e raio dos picos de aspereza de duas superfícies representadas através de perfis bidimensionais, em reduzido tempo de processamento (4 minutos), com repetibilidade aceitável ( $<1,5\%$ ) e mantendo boa correlação ( $<3\%$ ) com dados do artigo de McCool e medidas de superfícies de engenharia.

Na simulação 1 (comparação do programa com exemplo numérico de McCool) comprovou-se o funcionamento dos sub-programas de cálculo de área, carga, pressão, raio de contato e incremento de temperatura.

Na simulação 2 (comparação dos valores de índice de rugosidade  $R_q$  calculados pelo programa com os valores apresentados pelo rugosímetro), mostrou-se que os sub-programas de manipulação do perfil têm resultados compatíveis com os obtidos por um rugosímetro.

A simulação 3 (verificação do comportamento do modelo quando há variação da espessura do filme de lubrificante) mostrou:

- a) Semelhanças no comportamento dos parâmetros de área de contato e incremento de temperatura com a deformação dos picos em contato ( $x_1$ );
- b) Semelhança de comportamento entre raio do contato e máxima pressão com a raiz quadrada da deformação dos picos em contato ( $x_{1/2}$ );
- c) Semelhança de comportamento entre carregamento e a deformação dos picos em contato elevado a  $3/2$  ( $x_{3/2}$ ).

A simulação 4 mostrou a consistência dos resultados gerados, visto que os valores percentuais de desvio padrão dos resultados das 10 simulações são inferiores a  $1,5\%$ .

O modelo aqui desenvolvido pode ser aplicado em diversos casos de contato, bastando para isto uma estimativa do filme de lubrificante que separa as duas superfícies.

## **5. Referências bibliográficas**

- [1] McCool, J.I., "The Distribution of Microcontact Area, Load, Pressure, and Flash Temperature Under the Greenwood-Williamson Model", ASME Journal of Tribology, Vol. 110, Jan 1988, pp106-111.
- [2] Greenwood, J. A., Williamson, J. B. P., "Contact of Nominally Flat Surfaces". Proc. R. Soc. London, Series A, Vol. 295 (1966), pp. 300-319.
- [3] Marsaglia, G., "Generating a Variable from the Tail of Normal Distribution", Technometrics, Vol. 6, N.1, 1964, p. 101.
- [4] Archard, J.F., "The Temperature of Rubbing Surfaces". Wear, Vol. 2 (1958), pp. 438-455.
- [5] Whitehouse, D.J., "Handbook of Surface Metrology". Bristol IOP, 1994
- [6] Bush, A. W., Gibson, R. D., and Thomas, T. R., "The Elastic Contact of Rough Surface", Wear, Vol. 35 (1975), pp. 87-111

## **6. Anexos**

## 6.1 Função para simulação 1

```
function comp_McCool

%Modelo matemático de Greenwood-Williamson para calculo de parametros de microcontato
%Este modelo apresenta valores de area ,pressão, carga e raio de contato de um pico de
rugosidade (summit)
%Este modelo compara os valores apresentados por McCool em seu artigo e os resultados
obtidos pelo modelo apresentado

%Esta função requer a seguinte biblioteca de funções para funcionar:
%young, val_cont, param, sigma, raio, norm_distr, afastamento, mom_esp e mom_eq

%Programa desenvolvido para Trabalho de Formatura FMC 580/581
%Baseado no modelo de Greenwood-Williamson de microcontato
%sob orientação do Prof. Dr. Amilton Sinatora
%por Marcos Manoel Valverde Pereira
%email: marcosmvp@ig.com.br
%Colaboração e suporte: Laboratório de Fenômento de Superfícies da Escola Polotécnica
da USP (LFS-USP)
%finalizado em 4 de dezembro de 2000

%Cálculo dos momentos equivalentes para duas superfícies em contato
m0=((.1^2)+(.12^2));
m2=((.03^2)+(.028^2));
m4=m0*.1763;

h1=0.5; %Espaçamento entre os pontos do perfil de rugosidade da primeira superfície
h2=0.5; %Espaçamento entre os pontos do perfil de rugosidade da segunda superfície

%As unidades de ambos, perfil e espaçamento entre pontos devem ser iguais
E1=210; %Módulo de Young da primeira superfície de contato em GPa
E2=210; %Módulo de Young da segunda superfície de contato em GPa
Ni1=0.3; %Coeficiente de Poisson da primeira superfície
Ni2=0.3; %Coeficiente de Poisson da segunda superfície
H=.3; %Separação das superfícies (espessura do filme de óleo), mesma unidade do perfil
vel=1; %velocidade de deslizamento entre as superfícies unidade(m/s)
f=0.06; %coeficiente de atrito entre as superfícies
k1=.536; %constante termica da primeira superfície
k2=.536; %constante termica da segunda superfície
[E] = young(E1,Ni1,E2,Ni2); %cálculo do modulo de Young equivalente do contato

R=raio(m4); %calculo do raio de contato
[SS,d] = sigma(m0,m2,m4,H) %Cálculo do desvio padrão e da separação entre superfícies
[X1,X12,X32]=norm_distr(10000,d,SS); %criação dos vetores do perfil equivalente,
normalizado e ordenado de forma crescente

%os vetores apresentados tem 10000 pontos neste exemplo
[X1m,X12m,X32m,X1p,X12p,X32p] = val_cont(X1,X12,X32,0.9) %cálculo dos valores para
media e percentual da altura dos picos

%para o exemplo utilizaremos 90% dos picos em contato

[Area_medio,Carregamento_medio,Pressao_medio,Raio_medio,Teta_medio] =
param(X1m,X12m,X32m,R,SS,E,f,vel,k1,k2) %Saída para valores médios do pico de
rugosidade

[Area_perc,Carregamento_perc,Pressao_perc,Raio_perc,Teta_perc] =
param(X1p,X12p,X32p,R,SS,E,f,vel,k1,k2) %Saída para valores de um certo percentual
do pico de rugosidade
```

## 6.2 Função para simulação 2

```
function [m0,m2,m4] = mom_esp(X,h1)

%Esta função calcula o momento espectral de uma única superfície
%X é o vetor que contém os dados do perfil de rugosidade (unidade em microns)
%h1 é o espaçamento entre os pontos do perfil de rugosidade (unidade em microns)
%momentos espectrais m0,m2,m4 são as saídas da função (unidade microns ao quadrado)
%As entradas não devem necessariamente estar em microns, mas devem obrigatoriamente
estar na mesma unidade.

%Programa desenvolvido para Trabalho de Formatura PMC 580/581
%Baseado no modelo de Greenwood-Williamson de microcontato
%sob orientação do Prof. Dr. Amilton Sinatora
%por Marcos Mancel Valverde Pereira
%email: marcosmvp@ig.com.br
%Colaboração e suporte: Laboratório de Fenômeno de Superfícies da Escola Politécnica
da USP (LFS-USP)
%finalizado em 4 de dezembro de 2000

m=mean(X); %cálculo da média dos valores de X

X=X-m; %deslocando a linha média do sinal para o valor nulo

%As fórmulas de derivação apresentadas foram retiradas do livro Whitehouse

N=length(X); % números de pontos do perfil
L=h1*(length(X)-1); % comprimento do perfil medido [microns]

%calcula do m0

y=0; % variável auxiliar para cálculo das integrais do perfil
for i = 1:N,
    y=y+((X(i))^2)*h1; %soma dos quadrados dos termos do vetor do perfil de
    rugosidade
end

m0=y/L; % momento m0 (saída da função)

%calcula do momento m2

y=0;
for i = 4:(N-3),
    y=y+(((X(i+3))-9*(X(i+2))+45*(X(i+1))-45*(X(i-1))+9*(X(i-2))-X(i-3))^2)/60*h1)*h1;
    %soma das derivadas de primeira ordem dos termos do vetor do perfil de
    rugosidade
end

m2=y/(L-6*h1); % momento m2 (saída da função)

%calcula do momento m4

y=0;
for i = 4:(N-3),
    y=y+(((2*X(i+3))-27*X(i+2)+270*X(i+1)-490*X(i)+270*X(i-1)-27*X(i-2)+2*X(i-3))^2)/180*h1^2)*h1;
    %soma das derivadas de segunda ordem dos termos do vetor do perfil de rugosidade
end

m4=y/(L-6*h1); % momento m4 (saída da função)
```

### 6.3 Função para simulações 3 e 4

```
function modeloGW

%Modelo matemático de Greenwood-Williamson para calculo de parametros de microcontato
%Este modelo apresenta valores de area ,pressão, carga e raio de contato de um pico de
%rugosidade (summit)
%A entrada do sistema é o perfil de rugosidade adquirido por um rugosimetro

%Esta função requer a seguinte biblioteca de funções para funcionar:
%young, val_cont, param, sigma, raio, norm_distr, afastamento, mom_esp e mom_eq

%Programa desenvolvido para Trabalho de Formatura PMC 580/581
%Baseado no modelo de Greenwood-Williamson de microcontato
%sob orientação do Prof. Dr. Amilton Sinatora
%por Marcos Manoel Valverde Pereira
%email: marcosmvp@ig.com.br
%Colaboração e suporte: Laboratório de Fenômeno de Superfícies da Escola Politécnica
da USP (LFS-USP)
%finalizado em 4 de dezembro de 2000

load M1r1a0.dat; %perfil da primeira superfície de contato
load M1r1a0.dat; %perfil da segunda superfície de contato

h1=0.5; %Espaçamento entre os pontos do perfil de rugosidade da primeira superfície
h2=0.5; %Espaçamento entre os pontos do perfil de rugosidade da segunda superfície

%As unidades de ambos, perfil e espaçamento entre pontos devem ser iguais

x1=M1r1a0(:,2:2)/100; %Correção de unidades
x2=M1r1a0(:,2:2)/100; %Correção de unidades

E1=210; %Módulo de Young da primeira superfície de contato em GPa
E2=210; %Módulo de Young da segunda superfície de contato em GPa

Ni1=0.3; %Coeficiente de Poisson da primeira superfície
Ni2=0.3; %Coeficiente de Poisson da segunda superfície

vel=1; %velocidade de deslizamento entre as superfícies unidade(m/s)

f=0.06; %coeficiente de atrito entre as superfícies

k1=.536; %constante termica da primeira superfície (unidade Watt/cm.Celsius)
k2=.536; %constante termica da segunda superfície (unidade Watt/cm.Celsius)

[E] = young(E1,Ni1,E2,Ni2); %cálculo do modulo de Young equivalente do contato

[m0,m2,m4]=mom_eq(x1,h1,x2,h2); %cálculo dos momentos espectrais do contato

R=raio(m4); %calculo do raio de contato

SS=sigma(m0,m2,m4); %cálculo do desvio padrão

H=(1)*SS; %Espessura do filme de óleo (H), mesma unidade do perfil

d = afastamento(m0,m2,m4,H,SS); % (d) é a separação entre plano de contato e linha média
de alturas corrigida (summits)

[X1,X12,X32]=norm_distr(10000,d,SS); %criação dos vetores do perfil equivalente,
normalizado e ordenado de forma crescente
%os vetores apresentados tem 10000 neste exemplo

[X1m,X12m,X32m,X1p,X12p,X32p] = val_cont(X1,X12,X32,0.9) %cálculo dos valores para media
e percentual da altura dos picos
%para o exemplo utilizaremos 90% dos picos em contato

[Area_media,Carregamento_medio,Pressao_medio,Raio_medio,Teta_medio]
param(X1m,X12m,X32m,R,SS,E,f,vel,k1,k2) %Saída para valores médios do pico de
rugosidade

[Area_perc,Carregamento_perc,Pressao_perc,Raio_perc,Teta_perc]
param(X1p,X12p,X32p,R,SS,E,f,vel,k1,k2) %Saída para valores de um certo percentual
do pico de rugosidade
```



## 6.4 Funções Auxiliares

```
function [d] = afastamento(m0,m2,m4,H,SS)

%Função que calcula o afastamento entre as superfícies
%baseado no modelo de Greenwood-Williamson
%ENTRADA
% m0,m2,m4: momentos espectrais do contato
% H: espessura do filme de óleo
% SS : desvio padrão das alturas dos picos de rugosidade (summits)
% SAÍDA
% d: Separação entre plano de contato e linha média de alturas corrigida (summits)

%Programa desenvolvido para Trabalho de Formatura PMC 580/581
%Baseado no modelo de Greenwood-Williamson de microcontato
%sob orientação do Prof. Dr. Amilton Sinatora
%por Marcos Manoel Valverde Pereira
%email: marcosmvp@ig.com.br
%Colaboração e suporte: Laboratório de Fenômeno de Superfícies da Escola Politécnica
da USP (LFS-USP)
%finalizado em 4 de dezembro de 2000

alpha=(m0*m4)/(m2^2); %parâmetro de cálculo do desvio padrão

d=((((H/(m0^(.5)))-4/(sqrt(pi*alpha)))/(sqrt(1-(0.8968/alpha)))))*SS;%linha média de
alturas corrigida

function [m0,m2,m4] = mom_eq(X1,h1,X2,h2)

%Esta função calcula os momentos espectrais equivalentes das superfícies
% X1 e X2 : é o vetor que contém os dados do perfil de rugosidade (unidade em
microns)
% h1 e h2 : é o espaçamento entre os pontos do perfil de rugosidade (unidade em
microns)
% momentos espectrais m0,m2,m4 são as saídas da função (unidade microns ao quadrado)
% As entradas não devem necessariamente estar em microns, mas devem obrigatoriamente
estar na mesma unidade.

%Programa desenvolvido para Trabalho de Formatura PMC 580/581
%Baseado no modelo de Greenwood-Williamson de microcontato
%sob orientação do Prof. Dr. Amilton Sinatora
%por Marcos Manoel Valverde Pereira
%email: marcosmvp@ig.com.br
%Colaboração e suporte: Laboratório de Fenômeno de Superfícies da Escola Politécnica
da USP (LFS-USP)
%finalizado em 4 de dezembro de 2000

[m01,m21,m41]=mom_esp(X1,h1); %momentos espectrais da primeira superfície
[m02,m22,m42]=mom_esp(X2,h2); %momentos espectrais da segunda superfície

m0=(m01+m02)/2; %Cálculo de momento spectral m0
m2=(m21+m22)^(1/2); %Cálculo de momento spectral m0
m4=(m41+m42)^(1/2); %Cálculo de momento spectral m0

function [X1,X12,X32] = norm_distr(distr_size,d,SigmaS)

%norm_distr é a função de geração da distribuição normal
%distr_size é o tamanho do vetor de distribuição normal que será gerado
%d é a linha média de alturas corrigida
%SigmaS é o desvio padrão da distribuição das alturas dos picos
%X1,X12,X32 são os vetores normalizados e ordenados de forma crescente das alturas
(summits) dos picos de rugosidade

%Programa desenvolvido para Trabalho de Formatura PMC 580/581
%Baseado no modelo de Greenwood-Williamson de microcontato
%sob orientação do Prof. Dr. Amilton Sinatora
%por Marcos Manoel Valverde Pereira
%email: marcosmvp@ig.com.br
%Colaboração e suporte: Laboratório de Fenômeno de Superfícies da Escola Politécnica
da USP (LFS-USP)
%finalizado em 4 de dezembro de 2000
```

```

j=1;%variavel auxiliar
while j<distr_size %tamanho do vetor de distribuição normal
    u1=rand;%variavel randomica
    u2=rand;%variavel randomica

    if u2<((d/SigmaS)*(((d/SigmaS)^(2))-(2*log(u1))^(.5)))

        %condição para inclusão de novo pico de altura ao vetor de distribuição normal

        z(j)=((d/SigmaS)^2)-2*log(u1)^(.5);

        %geração dos vetores x, x1/2 e x3/2

        x(j)=z(j)-d/SigmaS;%normalização do vetor de distribuição normal
        x12(j)=(x(j)).^(1/2);
        x32(j)=(x(j)).^(3/2);
        j=j+1;%atualização da posição do pico de rugosidade (summits)
    end
end

%ordenamento dos vetores

X1=sort(x);
X12=sort(x12);
X32=sort(x32);

function[Area,Carregamento,Pressao,Raio,Teta] = param(X1,X12,X32,R,SigmaS,E,f,vel,k1,k2)

%a função param calcula os valores de saída do programa, para um certo valor de altura
de pico (summits)
%X1,X12,X32: são os valores para um pico de altura definida (pico médio ou pico com
porcentagem de contato)
%R: é o raio médio dos picos de contato
%SigmaS: é o desvio padrão das alturas dos picos de contato
%E: é o módulo de elasticidade relativo do contato
%f: é o coeficiente de atrito
%k1,k2: São os valores de condutividade termica do material
%vel: Velocidade relativa das superfícies

%Programa desenvolvido para Trabalho de Formatura PMC 580/581
%Baseado no modelo de Greenwood-Williamson de microcontato
%sob orientação do Prof. Dr. Amilton Sinatora
%por Marcos Manoel Valverde Pereira
%email: marcosmvp@ig.com.br
%Colaboração e suporte: Laboratório de Fenômeno de Superfícies da Escola Politécnica
da USP (LFS-USP)
%finalizado em 4 de dezembro de 2000

Area=pi*R*SigmaS*X1; %area de contato [unidade: microns ao quadrado]
%Saída para área de contato

Carregamento=(4/3)*E*(sqrt(R)*X32)*((SigmaS)^(3/2)); %Carregamento do contato [unidade:
mili Newton]
%Saída para Carregamento de contato

function [R] = raio(m4)

%Função que calcula o raio de contato do pico de rugosidade (summit)
%baseado no modelo de Greenwood-Williamson
%ENTRADA
% m4: momento espectral do contato
%SAÍDA
% R : raio de contato do pico de rugosidade (summit)

%Programa desenvolvido para Trabalho de Formatura PMC 580/581
%Baseado no modelo de Greenwood-Williamson de microcontato
%sob orientação do Prof. Dr. Amilton Sinatora
%por Marcos Manoel Valverde Pereira
%email: marcosmvp@ig.com.br

```

%Colaboração e suporte: Laboratório de Fenômento de Superfícies da Escola Politécnica da USP (LFS-USP)  
 %finalizado em 4 de dezembro de 2000

R=0.375\*((pi/m4)^(1/2));

function [SS] = sigma(m0,m2,m4)

%Função que calcula o desvio padrão das alturas dos picos de rugosidade (summits)  
 %baseado no modelo de Greenwood-Williamson  
 %ENTRADA  
 %m0,m2,m4: momentos espectrais do contato  
 %SAÍDA  
 %SS : desvio padrão das alturas dos picos de rugosidade (summits)  
 %Programa desenvolvido para Trabalho de Formatura PMC 580/581  
 %Baseado no modelo de Greenwood-Williamson de microcontato  
 %sob orientação do Prof. Dr. Amilton Sinatora  
 %por Marcos Manoel Valverde Pereira  
 %email: marcosmvp@ig.com.br  
 %Colaboração e suporte: Laboratório de Fenômento de Superfícies da Escola Politécnica da USP (LFS-USP)  
 %finalizado em 4 de dezembro de 2000

alpha=(m0\*m4)/(m2^2); %parâmetro de cálculo do desvio padrão

SS=((1-(0.8968/alpha))^(1/2))\* (m0^0.5); %desvio padrão SigmaS

function [X1m,X12m,X32m,X1p,X12p,X32p] = val\_cont(X1,X12,X32,perc)

%A função val\_cont apresenta os valores médios e de um dado percentual da altura máxima da variável de altura dos summits, que realmente estão em contato.

%SAÍDAS  
 %X1m,X12m,X32m :valores médios do perfil de rugosidade  
 %X1p,X12p,X32p :valores para uma dada porcentagem da altura dos picos de rugosidade

%ENTRADAS  
 %X1 :vetor que contém o perfil de rugosidade ordenado na forma crescente de valores  
 %X12 :vetor que contém o perfil de rugosidade elevado a potência 1/2  
 %X32 :vetor que contém o perfil de rugosidade elevado a potência 3/2  
 %perc :valor da porcentagem de dos picos com cotas de altura mais baixas do que X1p

%Programa desenvolvido para Trabalho de Formatura PMC 580/581  
 %Baseado no modelo de Greenwood-Williamson de microcontato  
 %sob orientação do Prof. Dr. Amilton Sinatora  
 %por Marcos Manoel Valverde Pereira  
 %email: marcosmvp@ig.com.br  
 %Colaboração e suporte: Laboratório de Fenômento de Superfícies da Escola Politécnica da USP (LFS-USP)  
 %finalizado em 4 de dezembro de 2000

N=length(X1); %N representa o número de pontos do perfil  
 i=round(N\*perc); %i representa a quantidade de picos que tem altura inferior a altura que representa uma dada porcentagem do total de picos

%Cálculo das médias dos picos em contato  
 X1m=mean(X1); %X1m recebe o valor médio do perfil de rugosidade  
 X12m=mean(X12); %X12m recebe o valor médio do perfil de rugosidade elevado a potência 1/2 (raiz quadrada do perfil)  
 X32m=mean(X32); %X32m recebe o valor médio do perfil de rugosidade elevado a potência 3/2

%Cálculo dos valores para a porcentagem escolhida  
 X1p=X1(i); %X1p representa o valor do pico com altura máxima entre a porcentagem dos picos mais baixos do perfil  
 X12p=X12(i); %X12p valor de X1p elevado a 1/2  
 X32p=X32(i); %X32p valor de X1p elevado a 3/2

```
function [E] = young(E1,Ni1,E2,Ni2)

%Função que calcula o Módulo de Young equivalente da superfície de contato
%ENTRADA
%E1,E2: módulos de Young da primeira e segunda superfície respectivamente (GPa)
%Ni1,Ni2: Coeficiente de Poisson da primeira e segunda superfície respectivamente
%SAÍDA
%E: Módulo de Young equivalente (GPa)

%Programa desenvolvido para Trabalho de Formatura PMC 580/581
%Baseado no modelo de Greenwood-Williamson de microcontato
%sob orientação do Prof. Dr. Amilton Sinatora
%por Marcos Manoel Valverde Pereira
%email: marcosmvp@ig.com.br
%Colaboração e suporte: Laboratório de Fenômeno de Superfícies da Escola Politécnica
da USP (LFS-USP)
%finalizado em 4 de dezembro de 2000

E=1/(((1-(Ni1)^2)/E1)+((1-(Ni1)^2)/E1));
```